

# 第六章 流体波动

波动是流体运动的一种形式，其主要特征就是流场及各种相应的物理量在空间分布和时间变化上均具有周期性。在地球物理流体力学或者大气动力学中，波动是一种很重要的运动形式。

由于地球自转所产生的“旋转效应”，使得在地球上运动的大气基本上呈涡旋运动，或者说大气运动具有准涡旋特性。同样，由于旋转效应、可压缩性以及重力场等等原因，大气运动又经常是波动运动。正如物理学中的光具有粒子性和波动性一样，是否也可以认为大气运动具有涡旋性和波动性的两重性。一般说来，流体波动可以是涡旋流，也可以是无旋（位势）流。或者说涡旋流跟波动是两种可以彼此独立的运动形式。在一般流体力学中，常讨论势流波。但是，在地球物理流体力学或者大气动力学中，由于旋转效应，大尺度波动经常是涡旋流。本章主要以较直观的水面重力波为例，来说明和介绍一些有关流体波动的基本概念。

## § 1 波动的概念

最形象且最直观的流体波动，就是水面波动，而在日常生活中更经常遇到的当然是声波等。为了形象而方便地说明流体波动的概念，考虑如图 6.1(a)所示的 1 维水面波——水渠波。水面平静时，其水深或水面高度  $H$  为常数。当水面受到干扰（如投石击水面）后，它就不再平静，而要发生起伏不平的变化。或者说水面高度  $h$  随空间位置  $x$  和时间  $t$  而变化， $h$  将是  $x$  和  $t$  的函数，即

$$h(x, t) = H + h'(x, t) \quad (6.1)$$

式中  $h'(x, t)$  为水面扰动高度，或者是相对于平静水面的高度偏差，可正可负，且有

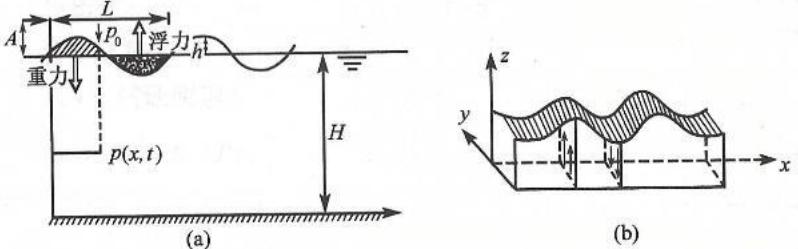


图 6.1 水面重力波

$$\frac{|h'(x, t)|}{H} = \frac{|h(x, t) - H|}{H} \ll 1 \quad (6.2)$$

即认为水面受扰后的起伏是很微小的。

下一节将要求得水面受扰后的  $h'(x, t)$  是一个波动函数。而在数学上刻画波动的最简单也是最基本的函数，就是三角调和函数或简谐函数，故为了比较方便地说明波的概念，同时又不失问题的一般性，在求解前可暂取

$$h'(x, t) = A \sin kX \quad (6.3)$$

式中  $X = X(x, t)$ ，并且  $X(x, 0) = x$ 。因此，在  $t = 0$  时刻由 (6.3) 式所示的水面是一正弦波或简谐波， $A$  为其波幅，即水面起伏最大高度。波形以  $2\pi/k$  长度重复出现，该长度称作  $L$  而称之为波长， $k = 2\pi/L$  称作波数。

倘若取  $X(x, t) = x - ct$ ，则  $Xoz$  为一沿  $x$  轴移动的坐标系，其移速为  $c$ 。于是，(6.3) 式改写为

$$h'(x, t) = A \sin(k(x - ct)) \quad (6.4)$$

此式表示水面高度沿  $x$  方向也是呈正弦波形起伏的分布，但是此种水平波形如 (6.3) 式所示，在动坐标系  $Xoz$  中是静止的，而在通常静止的  $xoz$  坐标系中它是跟动坐标系一起沿着  $x$  轴以速度  $c$  在移动的。

由于波的移动，在某一固定点  $x = x_0$ ，水面高度在  $2\pi/kc$  时间内周而复始地循环变化一次，该时间长度记作  $\tau$ ，并称为波动周期，即  $\tau = 2\pi/kc$ 。于是， $\sigma = 2\pi/\tau = kc$  称作波的频率。由  $\tau$  和  $\sigma$  的表式，不难得到

$$c = \frac{\sigma}{k} = \frac{L}{\tau} \quad (6.5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L = 2\pi/k \\ \tau = 2\pi/\sigma \end{array} \right. \quad (6.6)$$

而水面波形的移速正好等于一个周期  $\tau$  的时间内移过一个波长  $L$  的距离。波的移速又可称作位相速或相速。所谓波的位相大致说来就是波的起伏形态。例如，在 (6.4) 式中若  $k(x - ct) = \pi/2$ ， $t$  时刻沿  $x$  轴上的坐标点如满足此关系式，则这些点的水面正好处于波峰状态或波峰位相，也可以说它们的位相为  $k(x - ct) = \pi/2$ 。对于确定的波峰（或其他）位相，它（或它们）也是移动的，由  $k(x - ct) = \pi/2$ （或  $k(x - ct) = \pi/2$  等于其它常数值）不难求出其移速均为  $dx/dt = c$ ，因此  $c$  称为波的相速。在流体波动中， $A$ 、 $\sigma$ （或  $L$ ）以及  $c$  等可称为波参数。

按物理学中振动与波的普遍原理，水面受扰后所以会形成波动，就是由于水面离开其静止平衡位置经历扰动位移后，将受到一种跟位移反向的恢复力作用，从而使水面（或流点）振荡并逐点依次向周围传播开去，而形成波动。由图 6.1(a) 可知，这种跟扰动位移反向的恢复力就是重力或浮力。例如，水面上凸区（图中斜线区）较周围空气重，将

受到跟向上位移反向的重力作用;水面下凹区(图中细点区)较周围水体轻,于是受到跟向下位移反向的浮力作用。正是这种跟扰动位移反向的重力或浮力的恢复作用才形成了常见的水面波动,并称作水面重力波。

利用流体运动方程和连续方程,可以较清楚地分析说明重力、浮力的恢复作用,是如何通过流动的水平辐合、辐散而形成重力波的。为突出讨论波动性质,可不计旋转和黏性效应,于是不可压缩流体1维波动的水平运动方程为

$$\frac{du'}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (6.7)$$

式中  $u'$  取作跟水面扰动高度  $h'$  相应的扰动流速。假定流体压力近似地取为

$$p(x, z, t) = \rho g [H + h'(x, t) - z] + p_0 \quad (6.8)$$

以此代入(6.7),可得

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + u' \frac{\partial u'}{\partial x} + w' \frac{\partial u'}{\partial z} = -g \frac{\partial h'}{\partial x} \quad (6.9)$$

这样,运动方程右端的水平压力梯度项就可以用水面坡度来表示了,在压力只与深度有关的静力关系下,其物理含义是很清楚的。再取(2.16)式的不可压缩流体连续方程,即

$$\frac{\partial h'}{\partial t} = -H \frac{\partial u'}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}(h' u') \quad (6.10)$$

假如考虑水面重力波为微扰动,也就是跟波动有关的量如  $u'$ ,  $w'$  和  $h'$  等都是微量,它们的二次以上项都是高阶小量可近似地略去,于是(6.9)和(6.10)经线性化后,得

$$\begin{cases} \frac{\partial u'}{\partial t} = -g \frac{\partial h'}{\partial x} \\ \frac{\partial h'}{\partial t} = -H \frac{\partial u'}{\partial x} \end{cases} \quad (6.11)$$

这是水面重力波的闭合方程组。由该方程组知道,当水面受到外界扰动后将发生起伏不平( $\partial h'/\partial x \neq 0$ ),于是通过重力作用产生水平压力梯度力( $-g \partial h'/\partial x$ ),并引起了流体运动( $\partial u'/\partial t \neq 0$ )。流动结果将会出现水平辐合、辐散( $\partial u'/\partial x \neq 0$ ),最终反过来改变了原先的水面起伏( $\partial h'/\partial t \neq 0$ )。这样,重力、浮力恢复作用通过水平辐合、辐散,形成了水面波,并按成波原因定名为水面重力波。

倘若水面以日、月引力作为振荡恢复力或成波原因,则称作潮汐波。由普通物理知表面张力恒保持水面为最小面积,使得水面犹如橡皮膜,因而水表面张力也可作为振荡恢复机制,在水面形成波动。又因为表面张力作为成波原因只有在很短波长时才重要,故水表面张力形成的波称作涟漪波或涟波。在流体中还存在其他振荡恢复机制,如旋转效应、压缩性等等,前者可形成惯性波,后者可产生声波等等。

在图 6.1(a)中,波动是沿着  $x$  轴以相速  $c$  传播的。如果跟  $x$  轴相垂直的平面中流点振动位相同,见图 6.1(b),则称此平面为等位相面,相应的波动称平面波。由于波只沿

轴向传播,又称作1维平面波。

若波传播方向在空间中是任定的,则(6.4)式应改写成

$$h'(x, y, z, t) = A \sin(K_x x + K_y y + K_z z - \sigma t) \quad (6.12)$$

以  $K_x$ ,  $K_y$  和  $K_z$  为分量,定义波数矢  $\vec{K}$ ,即

$$\vec{K} = K_x \hat{i} + K_y \hat{j} + K_z \hat{k} \quad (6.13)$$

对于某确定时间  $t = t_0$ ,取(6.12)中的位相等于常数,即

$$K_x x + K_y y + K_z z - \sigma t_0 = \text{常数} \quad (6.14)$$

式中  $\sigma t_0$  也可并入右端常数中。显然(6.14)式为平面方程,其法向分量为( $K_x$ ,  $K_y$ ,  $K_z$ )。因此,(6.14)不但是波动(6.12)的等位相面,而且该等位相面是3维空间中的平面,于是(6.12)也是平面波。其传播速度  $c$  沿波矢  $\vec{K}$  方向(图 6.2),即类似于(6.5)式有

$$c = \sigma/K \quad \text{或} \quad \vec{c} = \frac{\sigma}{K^2} \vec{K}$$

以及

$$L = 2\pi/K$$

式中  $K$  值由(6.13)式知

$$K = (K_x^2 + K_y^2 + K_z^2)^{\frac{1}{2}} \quad (6.16)$$

其中波数矢  $\vec{K}$  是空间任定方向的,故(6.12)称作3维平面波。由此可推知,2维平面波的波数矢  $\vec{K}$  应在  $xoy$  平面上,即

$$\vec{K} = K_x \hat{i} + K_y \hat{j}$$

倘若等位相面为球面,相应的波动称作球面波。等位相面也可称作波面,在波动中经过一个波长  $L$  以后,波动位相恢复到原状,所以在物理空间中两邻近相同位相的波面,其间距就是波长  $L$ (图 6.3)。该两相同位相波面在  $x$  轴和  $y$  轴上的截距分别为  $L_x$  和  $L_y$ ,并且

$$L_x = 2\pi/K_x, L_y = 2\pi/K_y \quad (6.17)$$

它们分别称作  $x$  方向和  $y$  方向的波长。注意,(6.17)式不是波长  $L$  在  $x$  方向和  $y$  方向的分量,这不同于波数矢  $\vec{K}$ ,由(6.13)式及图 6.3 可知  $K_x$  和  $K_y$  是  $\vec{K}$  矢在波数空间中的两个分量。

以上取水面高度  $h$  为例引入了一些波动概念,其实跟图 6.1 所示的表面高度 1 维波动有关的任何物理量场  $f(x, t)$  均可取波函数的形式,成为相应的物理量场的波动。例如

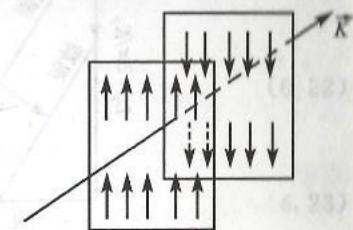


图 6.2 3 维平面波

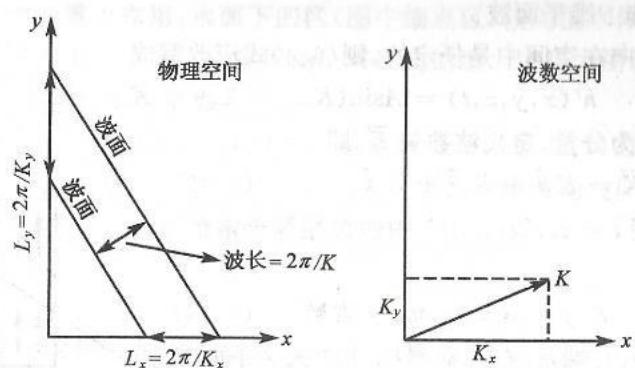


图 6.3 在物理空间的波长与波数空间的波数矢

密度	$\rho = \rho_0 \sin k(x - ct)$	即密度波
流速	$V = V_0 \sin k(x - ct)$	即流速波
压力	$p = p_0 \sin k(x - ct)$	即压力波

本章往后讨论的流体波动，基本上就是指流场中的这些物理量波动，并且基本上都是1维平面波。

## § 2 势流波动

本节所讨论的水面重力波是1维平面波，并且可以证明静止水面由于瞬间力作用，受扰产生的波动，其运动是无旋的势流，故可引入速度势函数  $\varphi(x, z, t)$  来讨论该波动问题。

考虑流体（例如水）近乎不可压缩，由(1.92)式有

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (6.18)$$

以及(2.75')式，即

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla \varphi)^2 + gz + \frac{p}{\rho} = 0 \quad (6.19)$$

如受扰势流是微弱流动，与  $\varphi$  有关的二次以上项为高阶小量可以略去，并且势函数相差一个时间函数  $(p_0/\rho)t$  不影响问题求解，故(6.19)化简为

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t} + gz + \frac{p - p_0}{\rho} \simeq 0 \quad (6.20)$$

式中  $p_0$  是水表面上所受的大气压。在一般水面波中，其表面为自由面，在自由面  $\zeta(x, t)$  上  $p = p_0$ ，于是由(6.20)式得

$$\zeta \simeq \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(x, 0, t) \quad (6.21)$$

此式即是用来由  $\varphi$  确定自由面形状的公式，又称波轮廓方程。

由于跟势流波  $\varphi$  有关的量例如  $\zeta, u, v, p, \dots$  等均为微量，故自由面上任一点  $z$  方向的分速度为

$$w = \frac{d\zeta}{dt} \simeq \frac{\partial \zeta}{\partial t} \quad (6.22)$$

而由速度势函数定义

$$w = -\frac{\partial}{\partial z} \varphi(x, z, t) \simeq -\frac{\partial}{\partial z} \varphi(x, 0, t) \quad (6.23)$$

合并(6.22)及(6.23)式，并考虑到(6.21)，可得自由面运动学边界条件

$$\left( \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{z=0} = 0 \quad (6.24)$$

在固体壁界上边界条件仍为壁面法向流速等于零，即

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \quad (6.25)$$

所以势流波问题归结为求解方程组(6.18)和(6.19)式并满足边界条件(6.24)和(6.25)式。初值条件不同，仅仅是使波动初位相不同而已，这对波动一般性讨论无关紧要。以下求解势流波时，暂不考虑初值条件。

引用分离变量法求解上述方程组。设

$$\varphi(x, z, t) = T(t)\Phi(x, z)$$

代入(6.18)和(6.24)式，消去共同因子，得

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \\ T''(t)/T(t) = -g \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=0} = -\sigma^2 \end{array} \right. \quad (6.26)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T''(t)/T(t) = -g \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=0} = -\sigma^2 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\sigma^2}{g} \Phi(x, z) \Big|_{z=0} \end{array} \right. \quad (6.27)$$

式中撇号表示对变量的微商，由(6.26)式知  $\Phi(x, z)$  仍满足拉普拉斯方程。而由(6.27)式知，方程式左端只是时间  $t$  的函数，右端只是坐标  $x$  的函数，它们应分别等于同一分离常数（或特征值） $-\sigma^2$  时等式才成立。所以

$$\left\{ \begin{array}{l} T''(t) + \sigma^2 T(t) = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\sigma^2}{g} \Phi(x, z) \Big|_{z=0} \end{array} \right. \quad (6.28)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T''(t) + \sigma^2 T(t) = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\sigma^2}{g} \Phi(x, z) \Big|_{z=0} \end{array} \right. \quad (6.29)$$

同样，对(6.26)式采用分离变量法求解，令

$$\Phi(x, z) = X(x)Z(z)$$

代入(6.26)式得

$$X''(x)/X(x) = -Z''(z)/Z(z) = -k^2 \quad (6.30)$$

式中  $k$  为分离常数(或特征值),由此得

$$\left\{ \begin{array}{l} X''(x) + k^2 X(x) = 0 \\ Z''(z) - k^2 Z(z) = 0 \end{array} \right. \quad (6.31)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Z''(z) - k^2 Z(z) = 0 \\ X''(x) + k^2 X(x) = 0 \end{array} \right. \quad (6.32)$$

易知,满足(6.28),(6.31)和(6.32)式的解分别为

$$\left\{ \begin{array}{l} T(t) = A_1 \cos \sigma t + A_2 \sin \sigma t \\ X(x) = B_1 \cos kx + B_2 \sin kx \\ Z(z) = C_1 e^{kz} + C_2 e^{-kz} \end{array} \right.$$

或者

$$\begin{aligned} \varphi(x, z, t) &= T(t) X(x) Z(z) \\ &= (A_1 \cos \sigma t + A_2 \sin \sigma t) (B_1 \cos kx + B_2 \sin kx) (C_1 e^{kz} + C_2 e^{-kz}) \end{aligned} \quad (6.33)$$

假若流体水平无界,垂直方向无限深。在无限深处,速度势  $\varphi$  应满足如下刚壁条件,即

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{z \rightarrow -\infty} = 0 \quad (6.34)$$

于是(6.33)如欲满足边界条件(6.34)式的解,必须取  $C_2 = 0$  再将(6.33)表示为

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 \quad (6.33')$$

其中

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_1 = C' e^{kz} \cos \sigma t \cos kx \\ \varphi_2 = C'' e^{kz} \sin \sigma t \cos kx \\ \varphi_3 = C''' e^{kz} \cos \sigma t \sin kx \\ \varphi_4 = C'''' e^{kz} \sin \sigma t \sin kx \end{array} \right.$$

其中

$$\left\{ \begin{array}{l} C' = A_1 B_1 C_1 \\ C'' = A_2 B_1 C_1 \\ C''' = A_1 B_2 C_1 \\ C'''' = A_2 B_2 C_1 \end{array} \right. \quad (6.35)$$

如果将(6.33')式所表示的  $\varphi$  代入(6.21)式即得流体表面的波形,代入(6.19)式即得体内各点的压力。不难分析,(6.35)式所示的  $\varphi_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) 均为驻波或不移动的波。

倘若,取  $C''' = -C'' = C$ , 将  $\varphi_2$  和  $\varphi_3$  相叠加, 得

$$\varphi(x, z, t) = C e^{kz} (\sin kx \cos \sigma t - \cos kx \sin \sigma t)$$

或

$$\varphi(x, z, t) = C e^{kz} \sin(kx - \sigma t) \quad (6.36)$$

以此代入波表面轮廓方程(6.21)及自由面边界条件(6.24), 分别得

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta(x, t) = a \cos(kx - \sigma t) \\ \sigma = \pm \sqrt{kg} \end{array} \right. \quad (6.37)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta(x, t) = a \cos(kx - \sigma t) \\ \sigma = \pm \sqrt{kg} \end{array} \right. \quad (6.38)$$

式中振幅  $a = -C\sigma/g$ 。(6.38)式称作频率方程或特征值方程。显然,(6.36)式所确定的流场为势流波动,相应的压力  $p$  场也是波动,较直观的水表面由(6.37)式知也呈波形,它们的波长  $L$  和周期  $\tau$ , 分别为

$$L = 2\pi/k, \tau = 2\pi/\sigma$$

根据(6.38)式可得

$$c = \sigma/k = \pm \sqrt{kg}/k = \pm \sqrt{g/k} \quad (6.39)$$

由此式或频率方程(6.38)可知,频率  $\sigma$  或位相速  $c$  均与重力  $g$  有关,这表示水面成波的原因是重力  $g$ ,故称作水面重力波。显然,水面波动是以  $c$  速在沿  $x$  轴正、负方向传播移位,但流点仍只在平衡位置附近振动而已。为讨论流点运动情况,由速度势  $\varphi$  的表达式(6.36)求出流速分量为

$$\left\{ \begin{array}{l} u = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = a \sigma e^{kz} \cos(kx - \sigma t) \\ w = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = a \sigma e^{kz} \sin(kx - \sigma t) \end{array} \right. \quad (6.40)$$

令  $C_1 = -C\sigma^2/g = a\sigma$ 。由上式求得流线微分方程为

$$dx/\cos(kx - \sigma t) = dz/\sin(kx - \sigma t)$$

上式已约去共同因子  $a\sigma e^{kz}$ , 积分得

$$e^{kz} \cos(kx - \sigma t) = C_0 \quad (6.41)$$

此为流线方程,取不同的积分常数  $C_0$ , 即代表了不同的流线,其某一时刻的流线分布如图 6.4 所示。

由于波动流场(6.40)与时间  $t$  有关为非定常流场,故流线与迹线不相重合。本节所考虑的是振幅较小的微弱波动,流点振动时离开其平衡位置  $(x_0, z_0)$  不远,因此流速分量可近似为

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = u \approx a \sigma e^{kz_0} \cos(kx_0 - \sigma t) \\ \frac{dz}{dt} = w \approx a \sigma e^{kz_0} \sin(kx_0 - \sigma t) \end{array} \right. \quad (6.42)$$

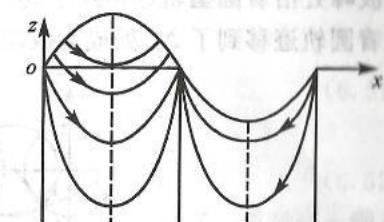


图 6.4 移动波轮廓与流线分布

设  $t = 0$  时流点未受扰动处在平衡位置  $(x_0, z_0)$ , 上述时间  $t$  积分, 得流点近似迹线方程为

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 - a e^{kz_0} \sin(kx_0 - \sigma t) \\ z = z_0 + a e^{kz_0} \cos(kx_0 - \sigma t) \end{array} \right.$$

将上两式,有

$$(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2 e^{2kz_0} \quad (6.43)$$

上式表明流点的近似轨迹是半径为  $a e^{kz_0}$ , 中心为  $(x_0, z_0)$  的圆,见图 6.5(a)。在自由面上( $z_0 = 0$ )圆的半径等于波幅  $a$  为最大,往流体深处半径随着深度增加而愈小。在无限深处,流点保持不动。在图 6.5(b)中,取  $M_0 M$  与  $-z$  轴成  $\Theta$  角,则

$$\tan \theta = -\frac{x - x_0}{z - z_0} = \tan(kx_0 - \sigma t)$$

或

$$\theta = kx_0 - \sigma t \quad (6.44)$$

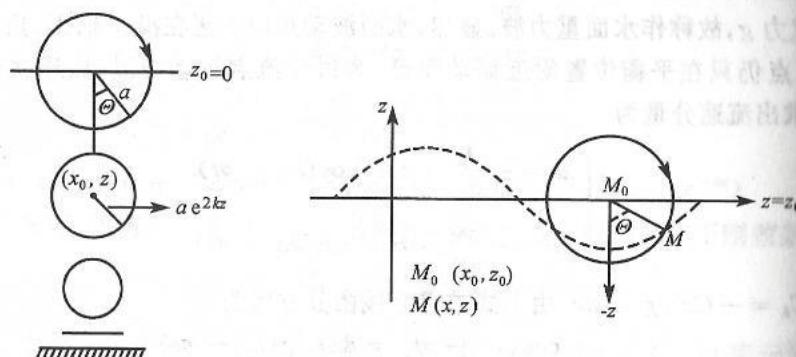
因此夹角  $\theta$  是随时间  $t$  增加而减少, 流点沿圆形轨迹是顺时针向移动的。图 6.5 (a) 移动波中不同深度的流点轨迹 (b) 自由面上  $M$  点沿圆的转动方向

图 6.6 展示了流点在平衡位置  $(x_0, z_0)$  附近作圆运动振荡时, 跟表面波向前传播的关系。例如  $t = t_1$  时,  $M_1$  点处在波峰位置,  $N_1$  点在波峰前方某处。到  $t = t_2$  时刻,  $M_1$  点在波峰处沿着圆型轨迹移到了  $M_2$  点处并到了波峰之后, 相应地原先在波峰前的  $N_1$  点沿着圆轨迹移到了  $N_2$  处成为波峰, 结果见到了表面波及波峰等向前传播。

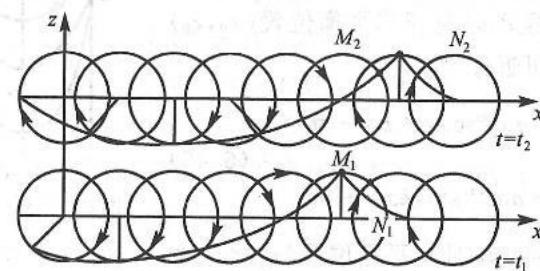


图 6.6 移动波中各流点沿轨迹的运动及波动移动的关系

倘若流体是有限深的, 则下底面刚壁边界条件改成

$$\left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{z=-h} = 0 \quad (6.45)$$

类似地, 可求得波动解为

$$\varphi(x, z, t) = C \cosh[k(z + h)] \sin(kx - \sigma t) \quad (6.46)$$

相应的相速表式为

$$c = \sigma/k = \sqrt{g \tanh(kh)/k} \quad \sigma^2 = kg \tanh(kh) \quad (6.47)$$

此式表明频率  $\sigma$  或者相速  $c$  与重力  $g$  和水深  $h$  有关, 是为有限深流体重力表面波。如  $h \ll L$ , 或  $h/L \ll 1$ , 则

$$\begin{cases} \tanh(kh) \simeq kh \\ c = \sqrt{g \tanh(kh)/k} \simeq \sqrt{gh} \end{cases} \quad (6.48)$$

此时相速  $c$  与波数  $k$  无关, 此种波称作浅水波或长波。如  $L \ll h$ , 即  $1 \ll h/L$ , 或  $1 \ll kh$ , 则

$$\begin{cases} \tanh(kh) \simeq 1 \\ c \simeq \sqrt{g/k} \end{cases} \quad (6.49)$$

此时相速  $c$  与无限深流体波动一样, 仅仅跟波数  $k$  有关, 这种波称作深水波。

### § 3 重力表面波和界面波

前节讨论的重力表面波是无旋势流的, 本节拟去掉势流的限制, 利用 § 1 中推导的水面重力波闭合方程组(6.11)式, 其中  $u'$  和  $h'$  作为待求的未知量, 再对重力表面波重新作推导讨论。把该方程组(6.11)的第二式对  $t$  求偏微商, 以及把第一式对  $x$  求偏微商跟  $t$  相乘, 再把两者结果相减就得到

$$\frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} = gH \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} \quad (6.50)$$

这是标准的 1 维波动方程。设其形式解为

$$h'(x, t) = A \sin k(x - ct) \quad (6.51)$$

由此代入(6.50), 则有

$$-k^2 c^2 h' = -gH k^2 h' \quad \text{或} \quad c = \pm \sqrt{gH} \quad (6.52)$$

因此, 欲使形式解(6.51)为方程(6.50)式的解, 则必须使(6.52)式成立。或者当  $c$  满足(6.52)时, 该形式解就是方程(6.50)的解。所以, (6.52)式就是水面重力波的传播速度公式, 在该式中, 已反映出成波的物理原因就是重力  $g$ 。其中正负号表示波动以相速  $c$  可向两个方向传播。这里推导表面重力波相速  $c$  的表式(6.52)与前节(6.46)的浅水表面重力波速(6.48)式相一致, 但本节未作势流限制。用类似的方法, 由(6.11)式消去  $h'$ , 再求解  $u'$ , 从而可得

$$u' = B \sin k(x - ct)$$

而且, 将上式和(6.51)式代入(6.11)式, 并考虑到(6.52), 可得

$$B = \sqrt{\frac{g}{H}} A$$

$$u' = \sqrt{\frac{g}{H}} A \sin k(x - ct) \quad (6.53)$$

这是水面重力波的流速场。

自然界的水面波，确切一些讲应该是空气和水之间的界面波，只是在讨论问题时通常不计及空气而已。如果以油代替水面上的空气，一般而言就应该考虑油的密度，而把水表面当作油与水的界面。以下介绍类似油、水之类上轻下重流体间的界面波。

设有如图 6.7 所示上轻下重流体间的界面，当它受扰后的扰动高度为  $h'(x, t)$ 。上层流体密度为  $\rho_1$ ，下层为  $\rho_2$ ，且  $\rho_1 < \rho_2$ 。对于下层流体而言，可有线性化方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial u'}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial h'}{\partial t} = -H \frac{\partial u'}{\partial x} \end{cases} \quad (6.54)$$

上列第一个方程右端的流体压力梯度项，也可用界面受扰后的坡度表示，第二个方程中的  $H$  为下层流体未受扰动时的深度。

假如在流体界面重力波中，以流体静力方程来考虑其压力，则由于静压力只与流体深度有关，所以当上层流体表面在未受扰动的情况下，而且为平面时，上层流体的水平压力梯度应为零，由图 6.7 可得

$$p_A = p_B = p = p_0 + \rho_1 g z_1 \quad (6.55)$$

式中  $p_0$  为上层流体表面所受的气压， $p$  为任一深度  $z_1$  处的流体压力。

按照流体静压力关系  $\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$ ，可推出不可压缩流体中的压力水平梯度是不随高度变化的，即

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (-\rho g) = 0 \quad \text{或} \quad \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0 \quad (6.56)$$

于是，如图 6.7 所示，在下层流体中可有

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho_2} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} (p_{B''} - p_{A''}) \\ &= -\frac{1}{\rho_2} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} (p_{B'} - p_{A'}) \end{aligned} \quad (6.57)$$

$$p_{B'} = p_B + \left( \frac{\partial h'}{\partial x} \Delta x \right) \rho_2 g = p + \left( \frac{\partial h'}{\partial x} \Delta x \right) \rho_2 g$$

$$p_{A'} = p_A + \left( \frac{\partial h'}{\partial x} \Delta x \right) \rho_1 g = p + \left( \frac{\partial h'}{\partial x} \Delta x \right) \rho_1 g$$

所以，(6.57) 式改写为

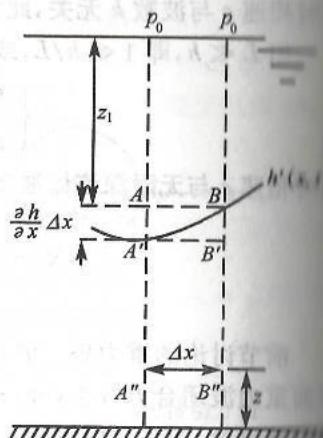


图 6.7 界面重力波中的液高与压力间的关系

$$-\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p}{\partial x} = -g \left( 1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \frac{\partial h'}{\partial x} \quad (6.58)$$

这就是采用受扰后的界面坡度所表示的流体压力水平梯度。

把(6.58)代入(6.54)式，可得到具有上轻下重流体界面的下层流体的运动方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial u'}{\partial t} = -g \left( 1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \frac{\partial h'}{\partial x} \\ \frac{\partial h'}{\partial t} = -H \frac{\partial u'}{\partial x} \end{cases} \quad (6.59)$$

比较(6.59)与(6.11)式，不难发现  $(1 - \rho_1/\rho_2)$  就是存在上层流体时的修正因子。显然，当上层轻流体为空气时，即  $\rho_1 \ll \rho_2$ ，(6.59) 式就近似退化为水表面重力波方程组(6.11)式。在(6.59)的两个方程中，消去  $u'$  可得

$$\frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} = g H \left( 1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} \quad (6.60)$$

这就是流体界面受扰后的界面波方程。以形式解代之，可求得其相速为

$$c = \pm \sqrt{g H \left( 1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)} \quad (6.61)$$

归纳界面重力波的表示式(6.59)、(6.60)及(6.61)，可以发现如把界面波中的重力看作修正重力  $g' = g(1 - \rho_1/\rho_2)$ ，则界面重力波就相当于表面重力波中有关的方程式。或者说，两者的不同就在于界面波中取修正重力  $g'$  或称约化重力。

在讨论上述流体间的界面波时，已假定上轻下重流体都是静止的。而在实验室流体或自然界的海洋和大气中，还可以经常出现如图 6.8(a)～(c)所示的流速不同的上轻下重流体，并称之为具有流速切变的流体质。例如，在实验室的细长水道中，盛有上轻(油)下重(水)的流体。如果沿水道长度方向没有上下倾斜，则其界面是水平的，并且上下流体都为静止(图 6.9(a)所示的水道垂直剖面)。倘若沿长度方向使水道以如图 6.9(b)所示的倾斜，则轻流体斜向上流而重流体斜向下流，从而构成了具有切变(图 6.8(d))的流体质界面。此种界面稍受扰动，即可形成如图 6.8(e)的界面重力波，其波速可推得\*为

$$c = \frac{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2}{\rho_1 + \rho_2} \pm \sqrt{\frac{(\rho_2 - \rho_1)}{(\rho_2 + \rho_1)} \frac{g}{k}} - \frac{\rho_1 \rho_2 (V_2 - V_1)^2}{(\rho_2 + \rho_1)^2} \quad (6.62)$$

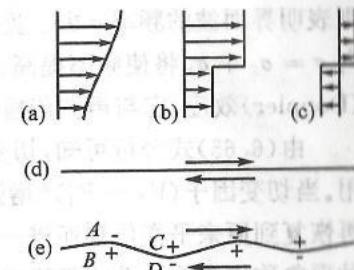


图 6.8 流体界面两侧的不同流动情况

式中  $V_1$  和  $V_2$  分别为界面上层和下层流体的流速。所以，上式右端第一项就是上下层流体的平均（按密度  $\rho$  加权）流速。这表明波移动速度  $c$  由两部分构成，一部分是平均流速，另一部分由(6.62)式右端第二项所示是波相对于介质（即运动流体）的传播速度。而在这一项中又含有两种成波物理原因，即重力  $g$  和流速切变  $(V_2 - V_1)^2$ ，故可称作重力-切变界面波。这种界面波在气象学中称作开尔文-亥姆霍兹(Kelvin-Helmholtz)波，有时可作为大气对流层和平流层中晴空湍流(GAT)的反应。最初曾用来解释波动云，因为在大气中可观测到类似图 6.8(a), (b) 所示的上下层风速切变，这就为产生开尔文-亥姆霍兹波提供了有利条件。界面波形成后，反过来也可影响流速上下的切变。

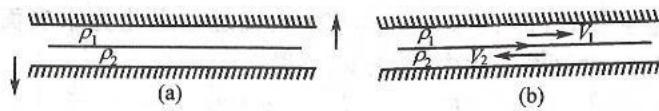


图 6.9 细长水道倾斜所成的不同流速的界面

倘若，将(6.62)式改写成

$$c = (\sigma_1 \pm \sigma_2)/k \quad (6.63)$$

其中

$$\sigma_1 = k \frac{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2}{\rho_1 + \rho_2} \quad (6.64)$$

$$\sigma_2 = k \sqrt{\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2} \frac{g}{k} - \frac{\rho_1 \rho_2 (V_2 - V_1)^2}{(\rho_2 + \rho_1)^2}} \quad (6.65)$$

则表明界面波的频率  $\sigma$  由于流体运动  $\sigma_1 \neq 0$ ，将会产生“移频”现象。在平均流的下游方向  $\sigma = \sigma_2 + \sigma_1$  将使频率提高，在上游方向  $\sigma = -(\sigma_2 - \sigma_1)$  频率降低，这称之为多普勒(Doppler)效应，它与声波传播中的多普勒效应，在本质上是相仿的。

由(6.65)式分析可知，切变因子  $(V_2 - V_1)^2$  总是减弱重力  $g$  的振荡恢复机制的作用。当切变因子  $(V_2 - V_1)^2$  增强到超过重力因子  $g$  时，流点受扰离开平衡位置后，将不再恢复到原来平衡位置而进一步离去。或者流体振荡时，其振幅将随时间迅速增长。这种现象称作流体波动的不稳定。因为，这时(6.65)所示的  $\sigma_2$  取虚数，即

$$\sigma_2 = i|\sigma_2| \quad (6.66)$$

式中  $i = \sqrt{-1}$ 。因而，跟(6.51)相当的波动解为

$$h'(x, t) = A \sin[kx - (\sigma_1 + i|\sigma_2|)t]$$

或 
$$h'(x, t) = A \operatorname{Im}\{\exp(i[kx - (\sigma_1 + i|\sigma_2|)t])\}$$

式中  $\operatorname{Im}\{\}$  表示取虚部，展开上式得

$$h'(x, t) = A_1 \sin(kx - \sigma_1 t) \quad (6.67)$$

式中  $A_1 = A \exp(|\sigma_2|t)$ ，即波振幅是时间  $t$  的指数函数。这表明，当切变作用超过重力作用

$$\frac{(\rho_2 - \rho_1)}{(\rho_2 + \rho_1)} \frac{g}{k} < \frac{\rho_1 \rho_2 (V_2 - V_1)^2}{(\rho_2 + \rho_1)^2}$$

将取虚数，振幅将随时间单调增长，此时界面波为不稳定。

## § 4 群速

跟其它物体运动一样，在流体波动运动过程中也伴随着动能、位能等等的相互转化。而波动能量的一个显著特征就是波能与振幅的平方成正比，例如大振幅波相应的波能就大。本节将推证这一结论，并引入群速  $c_g$  以此说明波能是以  $c_g$  速度在各个波中传播的。

现在，以重力表面波为例来定义流体波动能量的计算。为此取一个深为  $H$ ，波长为  $L_x$  的单位宽度流体块，其波动速度为  $u'$ ，由于波动时自由面离开平衡位置很微小，其垂直方向流速  $w'$  对动能贡献很小，因此它所含的波动动能定义为

$$K = \int_0^{L_x} \frac{1}{2} \rho u'^2 H dx \quad (6.68)$$

相对于平静水面， $dx$  长度和单位宽度的波形水面和平静水面间的流体体积为  $h' \cdot 1 \cdot dx$ ，其重心为  $h'/2$ ，因而相应的波动位能定义为\*

$$\Pi = \int_0^{L_x} \frac{1}{2} h' \rho g h'^2 dx = \int_0^{L_x} \frac{1}{2} \rho g h'^2 dx \quad (6.69)$$

由 § 3 已求得重力表面波的水面扰动高度和波动流速分别为

$$\begin{cases} h' = A \sin(k(x - ct)) \\ u' = \sqrt{\frac{g}{H}} A \sin(k(x - ct)) \end{cases}$$

以此分别代入(6.68)和(6.69)，并利用三角公式

$$\sin 2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos^2 \alpha)$$

积分以后得

$$\begin{cases} K = \frac{1}{4} \rho g A^2 L_x \\ \Pi = \frac{1}{4} \rho g A^2 L_x \end{cases}$$

或

$$K + \Pi = \frac{1}{2} \rho g A^2 L_x \quad (6.70)$$

\* 即以平静水面作为计算波动位能的基准面。

由上式可知,对于确定波长( $L_x$ )的重力表面波的波动能量(无论是动、位能或是两者之和的总能量)跟波动振幅 $A$ 的平方成正比;并且对于确定的波长和振幅,这些波动能量均为常数。值得指出,波能值跟波幅平方成正比的结论,对于其它波动一般也成立。

由重力表面波(6.51)的表示式,不难看出这些波动在传播过程中,其波幅保持不变,可称作“等幅波列”。由于波能与波幅平方成比例,所以从能量角度而言,可以认为波能是平均分配于波列的每个波长上,而且传播过程中波能在每个波长间没有传输。

其实,等幅波列只是确定波数的纯谐波波列的现象。当两列水平波数 $k + \Delta k$ 和 $k - \Delta k$ 很靠近(即 $\Delta k/k \ll 1$ )的波 $h'_1$ 和 $h'_2$ (如图6.10所示)相叠加时,叠加以后的合成波列 $h'_1 + h'_2$ 就不是等幅波列了。因为,两波列叠加时有些波长处的振幅是相抵消的,有些是累加增长的。从波能的角度而言,上述合成波列的波能在各波长间是不相等的,或者说波动能量是向某些波群区域集中分布的。这个结论可由图6.10直观地得到,也可以由两个波动数学函数表示式推得。

以重力表面波为例,取两列波数和频率均相差很微但波幅相等的波列,即

$$\begin{cases} h'_1(x,t) = A \sin[(k - \Delta k)x - (\sigma - \Delta\sigma)t] \\ h'_2(x,t) = A \sin[(k + \Delta k)x - (\sigma + \Delta\sigma)t] \end{cases} \quad (6.71)$$

将以上两波列相叠加后,有

$$h'(x,t) = h'_1 + h'_2 = A^* \sin(kx - \sigma t) \quad (6.72)$$

其中已利用三角公式

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

因此,(6.72)中的 $A^*$ 应该为

$$A^* = 2A \cos(\Delta k x - \Delta\sigma t) \quad (6.73)$$

当 $\Delta k/k \ll 1$ 和 $\Delta\sigma/\sigma \ll 1$ 时,叠加后的合成波列(6.72)与未叠加前的两个波列(6.71)相比较,三者的波数和频率均近于相等,即

$$\begin{cases} k + \Delta k \simeq k \simeq k - \Delta k \\ \sigma + \Delta\sigma \simeq \sigma \simeq \sigma - \Delta\sigma \end{cases}$$

而叠加前后波列的最突出的差别在于波幅,原先两列等幅的波列(同一波列中也是等幅的),叠加后成为变幅波列。并且,此种变幅波列的波幅 $A^*$ ,按(6.73)式也是呈波形变化的,但是这种变化在时、空间都是很缓慢的。图6.10中的合成波列 $h'_1 + h'_2$ 的外廓线就

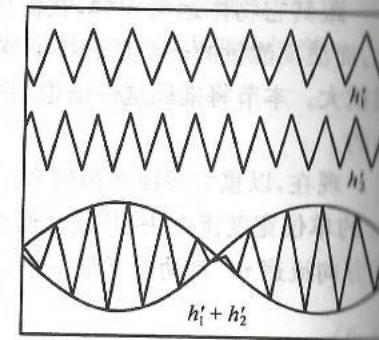


图 6.10 两列波的叠加合成

是此种波形,这也就是(6.73)式的图形,可称作合成波列波幅的“包迹线”。倘若把图6.10中的波列看作无线电讯中的“基波”,则其波幅“包迹线”相当于“载波”。由(6.73)式知,波幅包迹线是在移动的,其移速为

$$c_g = \frac{\Delta\sigma}{\Delta k} \simeq \frac{d\sigma}{dk} \quad (6.74)$$

上列包迹线移速又可称作群速(group velocity)。

为什么称波包迹移速为群速呢?首先分析波列相速与波长(或波数)间的关系。由于叠加前后波列的相速为

$$c \simeq \frac{\sigma}{k} \simeq \frac{\sigma + \Delta\sigma}{k + \Delta k} \simeq \frac{\sigma - \Delta\sigma}{k - \Delta k} \quad (6.75)$$

$$\sigma = ck = \frac{2\pi c}{L}$$

将上式代入包迹移速(6.74)式,得

$$c_g = \frac{d\sigma}{dk} = \frac{d(2\pi c/L)}{d(2\pi/L)} = c - L \frac{dc}{dL} \quad (6.76)$$

由此可见,当波列相速 $c$ 与波长 $L$ 无关时,即 $dc/dL = 0$ ,则合成波列的波包迹移速 $c_g$ 等于相速 $c$ 。于是包迹内所围的合成波列的某一群波,相对于包迹线没有相对运动,或者包迹线中总是为那一群波所占据着。因此,包迹线的移速可称作那一群波的移速,简称为群速。当波列相速与波长有关,即 $dc/dL \neq 0, c_g \neq c$ 即合成后的波跟包迹间有相对速度,合成波列可在包迹中穿行,包迹中的波群个体是不断更换的。如图6.11所示, $c_g < c$ 合成波列在包迹中向前穿行,图中虚线就是波群中某一确定单体在各时刻的连线,原先它在包迹的中段波幅最大处,然后向包迹前缘穿行,波幅逐渐变小,图中粗实线为包迹中段的连线。粗实线不及虚线斜向前,表示 $c_g < c$ ,包迹移动不及合成波列移动快。倘若这时包迹移速仍称作群速,则要注意波群的个体成员因在包迹中穿行而在更换的。总之,对两等幅波列合成后的变幅波列,可视作是一系列波群或波束连接而构成的,而每一个波群或波束作为整体是以群速移动的,对于波群中的每个成员又仍以相速移动的,并且相速可不等于群速。

考虑到波幅平方与波能成正比的关系,因而波幅包迹的移速或群速显然也就是波能的移速。例如在图6.11上包迹移速小于合成波相速,所以,相对于波列,包迹移速是向上游移动的,于是上游波列的波幅随时间将会增大(即包迹后缘的波列向前穿行到包迹中段而波幅增大),这相当于波能向上游传输使得那里的波幅增大。所以,在合成波列中,波动位相是以相速 $c$ 传播的,而其波能是以群速 $c_g$ 传输的。当相速与波长有关(即

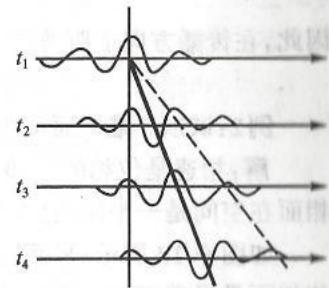


图 6.11 相速与群速

$dc/dL \neq 0$  时, 波能将以  $c_g$  速度在波列中向各个波长传输或“频散”开去, 此种波动称作频散波。群速和频散波的概念, 在大气波动中是较为重要的基本概念。

## § 5 例 题

例 1: 已知波源位于原点 ( $x = 0$ ) 的谐波方程为  $y = A \cos(bt - dx)$ , 试求

(1) 在传播方向上距波源  $l$  处的振动方程式。

(2) 此点与波源的位相差。

解: (1) 振动表示某个质点的运动情况, 其方程为  $y = f(t)$ , 而波动则为许多相互有联系的质点系的运动情况, 方程为  $y = f(x, t)$ 。

在波动方程中, 如果将  $x$  给定, 那末这时的波动方程便蜕变为该点的振动方程。

显然, 在传播方向上距波源  $l$  处的振动方程式为

$$y = A \cos(bt - dl)$$

(2) 由波动方程知, 波源的振动方程为

$$y = A \cos bt$$

因此, 在传播方向上距波源  $l$  处一点与波源的位相差  $\Delta\varphi$

$$\Delta\varphi = (bt - ld) - bt = -ld$$

例 2: 试以 3 维平面波为例说明相速不满足通常的矢量合成法则。

解: 相速是位相的传播速度。在 3 维平面波中, 等位相面在空间是一平面, 且波速矢  $\vec{K}$  为其法向矢。

如图 6.12 所示, 平面波沿着  $\vec{K}$  矢的方向传播, 即等位相面是沿着其法线方向移动的。在单位时间内, 它沿  $\vec{K}$  矢方向的移动距离为  $AA' = c$ , 而等位相面沿  $x$  方向、 $y$  方向、 $z$  方向的移动距离分别为  $c_x = BB'$ ,  $c_y = CC'$  和  $c_z = DD'$  ( $DD'$  在图中未画出)。由图中可明显看出,  $BB' > AA'$ ,  $CC' > AA'$ ,  $DD' > AA'$ , 即

$$c^2 \neq c_x^2 + c_y^2 + c_z^2$$

$$\vec{c} \neq c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}$$

$$c = \frac{\sigma}{K} = \frac{\sigma}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}}$$

$$c_x = \frac{\sigma}{K_x}, \quad c_y = \frac{\sigma}{K_y}, \quad c_z = \frac{\sigma}{K_z}$$

例 3: 试证明上下为固壁的两种流体的界面上长(重力)波的传播速度为

$$c = \sqrt{\frac{g(\rho_2 - \rho_1)h_1h_2}{\rho_2 h_1 + \rho_1 h_2}}$$

式中  $\rho_1, h_1$  和  $\rho_2, h_2$  分别为上部和下部流体的密度和深度, 且  $\rho_2 > \rho_1$  (图 6.13)。

解: 由于考虑无旋的波动, 即  $\nabla^2\varphi = 0$ , 取速度势的形式解为  $\varphi = B(z)\sin(kx - \sigma t)$  将  $\varphi$  代入  $\nabla^2\varphi = 0$  后, 得

$$-k^2 B(z) + \frac{d^2 B}{dz^2} = 0$$

由此求得  $B(z) = c_1 e^{kz} + c_2 e^{-kz}$

考虑到水域上下固壁的边界条件

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=h_1} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=-h_2} = 0$$

对上部流体来说, 即有

$$c_1 k e^{kh_1} - c_2 k e^{-kh_1} = 0$$

$$\text{若令 } c_1 = \frac{1}{2} B_1 e^{-kh_1}, \quad c_2 = \frac{1}{2} B_1 e^{kh_1}$$

则上部流体的速度势为

$$\varphi_1 = B_1 \sin[k(z - h_1)] \sin(kx - \sigma t)$$

同理, 可求得下部流体的速度势为

$$\varphi_2 = B_2 \sin[k(z + h_2)] \sin(kx - \sigma t)$$

假定分界面的方程是

$$\zeta = a \cos(kx - \sigma t)$$

再考虑到在小振幅波假定下分界面上的运动学边界条件

$$\left. \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right|_{z=0} = - \left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right|_{z=0} \quad \text{和} \quad \left. \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right|_{z=0} = - \left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right|_{z=0}$$

即有

$$\begin{cases} a\sigma = kB_1 \sin(kh_1) \\ a\sigma = -kB_2 \sin(kh_2) \end{cases} \quad (6.77)$$

另外, 在小振幅波假定下可略去拉格朗日积分中的  $\frac{1}{2}V^2$  项, 于是有

$$p_1 - p_0 = \rho_1 \left( \left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \right|_{z=0} - g\zeta \right)$$

$$p_2 - p_0 = \rho_2 \left( \left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \right|_{z=0} - g\zeta \right)$$

其中  $p_0$  是分界面上未受扰动时的压力值。扰动后的分界面上  $p_1 = p_2$ , 则有

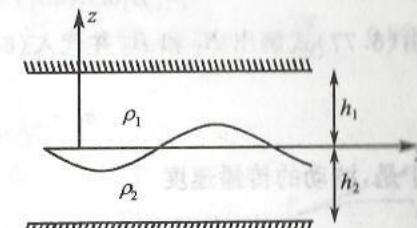


图 6.13 流体中的界面波

$$\rho_1 \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \Big|_{z=0} - g\zeta \right) = \rho_2 \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \Big|_{z=0} - g\zeta \right)$$

$$\rho_1 [B_1 \operatorname{sech}(kh_1) + ga] = \rho_2 [B_2 \operatorname{sech}(kh_2) + ga] \quad (6.78)$$

由(6.77)式解出  $B_1$  和  $B_2$  并代入(6.78)式, 得

$$\sigma = \sqrt{\frac{(\rho_2 - \rho_1)gk}{\rho_1 \operatorname{cth}(kh_1) + \rho_2 \operatorname{cth}(kh_2)}}$$

于是, 波动的传播速度

$$c = \frac{\sigma}{k} = \sqrt{\frac{(\rho_2 - \rho_1)g}{k[\rho_1 \operatorname{cth}(kh_1) + \rho_2 \operatorname{cth}(kh_2)]}}$$

由于是长波,  $\lambda \gg h_1$  和  $h_2$ , 故有  $\operatorname{cth}(kh_1) \approx \frac{1}{kh_1}$ ,  $\operatorname{cth}(kh_2) \approx \frac{1}{kh_2}$ , 这样便证得

$$c = \frac{\sigma}{k} = \sqrt{\frac{(\rho_2 - \rho_1)gh_1h_2}{\rho_1h_2 + \rho_2h_1}}$$

**例4:** 试以无限深水 ( $H \gg \lambda$ ) 的表面行进波为例, 说明群速度就是波动能量的传播速度。

解: (6.36)和(6.37)式, 分别为无限深水的速度势和波表面轮廓方程, 其中  $a = -c_1\sigma/g$ 。利用(6.40)和(6.37)式, 不难计算得在一个波长( $\lambda$ )上的波动动能和位能, 为

$$K = \frac{1}{2}l \int_0^\lambda \int_{-\infty}^0 (u^2 + w^2) dz dx = \frac{1}{4}\rho g a^2 \lambda$$

$$II = \int_0^\lambda \frac{\zeta}{2} \rho g \zeta dx = \frac{1}{4} \rho g a^2 \lambda$$

在计算动能时, 考虑到  $\zeta \ll H$ , 取  $\zeta + H \cong H$ 。

由于是理想流体, 压力是惟一的应力, 因此取  $y$  方向为单位宽度的波形流体块的某一纵截面(平行于  $yoz$  平面), 流体沿  $x$  轴在一个周期内的平均做功率为

$$\bar{W} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \int_{-\infty}^0 p u dxdz dt$$

据(6.20)式和(6.36)式, 有

$$p = \rho c_1 (-\sigma) e^{kz} \cos(kx - \sigma t) + (p_0 - \rho g z)$$

将其代入上式, 可积分得

$$\bar{W} = \frac{1}{2} \rho g a^2 \cdot \frac{1}{2} \frac{\sigma}{k} = \frac{K + II}{\lambda} \cdot c_g$$

$$\text{式中 } c_g = \frac{d\sigma}{dk} = \frac{1}{2} \frac{g}{\sigma} = \frac{1}{2} \frac{g\sigma}{\sigma^2} = \frac{1}{2} \frac{\sigma}{k}.$$

由此可见, 通过某一纵截面流体对波形流体块的做功率就等于单位时间内经过该

纵截面向波形流体块传递的能量, 而  $\frac{K + II}{\lambda}$  为单位长度的波能, 因此  $c_g$  就是波动能量的传播速度。

**例5:** 试由图解方法来说明当  $\frac{dc}{dL} > 0$  时,  $c_g < c$ ;  $\frac{dc}{dL} < 0$  时,  $c_g > c$ ; 而  $\frac{dc}{dL} = 0$  时,  $c_g = c$ 。

解: 以波的传播速度  $c$  为纵坐标, 波长  $L$  为横坐标, 以曲线  $AB$  表示  $c$  与  $L$  之间的关系。在曲线上任取一点  $P$ , 并作切线  $PD$ 。显然, 如图 6.14 所示

$$PF = DF \operatorname{tg} \alpha = L \operatorname{tg} \alpha$$

由解析几何知, 切线的斜率

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dc}{dL}$$

所以

$$PF = L \frac{dc}{dL}$$

$$DO = EO - ED = EO - PF = c - L \frac{dc}{dL}$$

很清楚,  $DO$  恰就是群速。

图 6.14 讨论的是波速  $c$  随  $L$  增大而增大, 即  $\frac{dc}{dL} > 0$  的情况,  $D$  点位于  $E$  的下方, 因而  $c_g < c$ 。若  $\frac{dc}{dL} < 0$  时, 则不难想像,  $D$  点将高于  $E$  点, 这相当于  $c_g > c$ ; 而当  $\frac{dc}{dL} = 0$  时,  $c$  与  $L$  的关系在图解上将是一条和  $L$  轴相平行的直线, 在情况下,  $E$  点和  $D$  点重合, 即  $c_g = c$ 。

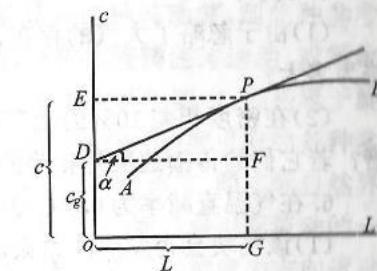


图 6.14 波速  $c$  随  $L$  的分布曲线

## 习题六

- 试讨论振动与波动的异同和联系。
- 已知波动方程为  $y = 10 \cos \pi (2.5t - 0.01x)$ , 求波长、周期和相速(据这些量的物理意义来求出)。
- 有一横波, 其波动方程为  $y = 2 \cos (\frac{\pi x}{3} - \frac{\pi}{6}t)$ 
  - 试画出  $t = 0$  和  $t = 2$  秒时的波形
  - 指出  $t = 0$  和  $t = 2$  秒时与波源( $x = 0$ )相距为  $\frac{L}{6}$  ( $L$  为波长) 点的横向位置。
- 对于直线渠中的 1 维均匀水流 ( $U = \text{常数}$ ), 若水表面受到微扰动, 试写出其线性化后的动力学方程组为

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) u' = -g \frac{\partial h'}{\partial x} \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) h' = -H \frac{\partial u'}{\partial x} \end{cases}$$

并求出重力表面波相速度为  $C = U \pm \sqrt{gH}$ 。

5. 试求:

(1) 由于忽略了大气的存在, 在确定浅水表面上的波动传播速度时所产生的相对误差为多大?

(2) 在密度相差 10% 的上下层流体的界面上的波长应比自由表面上的波长大多少倍? 若它们的传播速度是相等的。

6. 在气温直减率为  $0.5^{\circ}\text{C}/100\text{m}$  的大气中, 温度为  $7^{\circ}\text{C}$  的气块受一扰动, 问:

(1) 该气块会否发生浮力振荡?

(2) 如气块作上下振动, 其周期为多大?

(3) 若起始上升速度为  $1\text{m/s}$ , 求其能够达到的最高位置。

7. 证明: 群速度可表为

$$c_g = \frac{c^2}{c - \sigma \frac{dc}{d\sigma}}$$

8. 证明相速为某一位相点的移动速度, 群速是某确定振幅的移动速度。

## 第七章

倘若用于考察流体运动的参考系称为旋转参考系, 并且相对地看为旋转流体(rotating fluid)。对于旋转流体力学问题, 因此近年的数值表明, 地球大气、海洋和地球的各种大尺度运动, 都将呈现一系列的新现象。例如, 在给定的, 即“水从高处往低处流”。从而出现流体沿着等压线(即与平行的地转流动或者气象学中的在适当条件下, 经普鲁德曼-泰勒维化等等。对于旋转效应所以介绍。对于旋转效应所引起界层如埃克曼层(Ekman layer)等等, 均可参见有关大气动力学和大气动力学, 可统称转)流体力学。

### § 1 旋转

由于牛顿第一和第二定律的讲述, 把加速度转换到旋转参考系中。旋转所引起的加速度的附加项中的此种附加项是作为体积力。

由于黏性不受旋转的影响, 计算黏性, 而把流体当作是无黏性流体运动方程组(详见附录 I)。